OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2000 (29)

O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách

Ingrid Semanišinová a Marián Trenkler

Abstract: Magic squares belong to the oldest mathematical amusements. A magic square is a square array of integers in which the numbers in rows, columns, and diagonals have the same sums respectively. Its natural generalization yields to a magic cube. Magic squares have played various roles in the mathematics classroom: as a motivational device, as a problem-solving venture, and as an alternative way to review content. Magic squares can be used to formulate interesting problems which can be solved in terms of computers therefore they are a good device for introducing computers to children. In this paper we formulate several problems related to magic squares and cubes and establish a simple algorithm for their constructions.

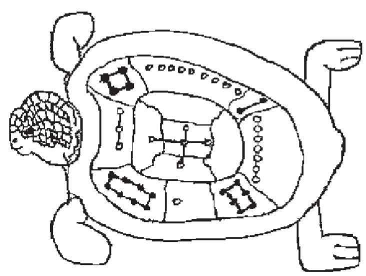
Mnohí žiaci, študenti, ich rodičia ale dokonca aj niektorí učitelia matematiky majú predstavu, že matematika je izolovaná veda, ktorá súvisí s vecami okolo nás len okrajovo a predstavuje iba komplikované a otravné výpočty, ktoré môže pochopiť a zvládnuť len úzka skupina vyvolených. Zmeniť túto atmosféru môžeme vhodnou motiváciou žiakov, poukazovaním na prepojenie rozvoja matematiky s historický a kultúrnym rozvojom ľudstva, poukazovaním na aplikácie v reálnom živote, ale aj vhodným budovaním matematických poznatkov a nielen prezentáciou hotových výsledkov. Vhodnou témou na ukážku takéhoto prístupu sú magické štvorce a magické kocky. Táto téma môže byť prezentovaná na rôznych úrovniach a dá sa očakávať, že bude dobre prijatá žiakmi všetkých vekových kategórií. Príťažlivosť magických štvorcov a kociek pre žiakov spočíva v ich zrozumiteľnosti. Aj menej nadaní žiaci majú šancu ich pochopiť, môžu skúmať ich vlastnosti a skúsiť objaviť niečo nové, môžu sa zahrať na bádateľa.

Tento príspevok obsahuje postupnosť úloh, doplnenú historickými poznámkami. Prostredníctvom nich sa žiaci oboznámia s pojmami magický štvorec a magická kocka. Myslíme si, že riešenie týchto úloh pomôže žiakom porozumieť tvorbe matematických myšlienok a definícií, môžu o nich diskutovať, môžu formulovať rôzne hypotézy a snažiť sa ich dokazovať. Učia sa komunikovať a rozmýšľať matematicky, učia sa formulovať a riešiť matematické problémy.

1. O pôvode magických štvorcov

Pred viac ako 4000 rokmi vznikla v Číne legenda o rieke Lo, ktorá bola uvedená v knihe *Yih King* a do dnešných dní sa zachovala ako *Lo Shu* (Kniha o rieke Lo).

Toto je príbeh Lo Shu: *V starej Číne, v ére Yang Hui bola veľká povodeň, ktorú pripisovali božiemu hnevu. Aby upokojili jeho hnev, ľudia prinášali obetné dary riečnemu bôžikovi rozvodnenej rieky Lo. Ale keď priniesli obete nič mimoriadne sa nestalo. Z rieky vždy vyšla podivná korytnačka* (obrázok 1) *a prešla okolo obetí. Bôžik obetu neprijal. Až raz si malé dieťa všimlo zvláštnu kresbu na korytnačkinom pancieri. Keď si ju ľudia pozorne prezreli uvedomili si koľko obetí majú priniesť.*



Obr. 1

Úloha 1.

Pozorne si prezrite nadprirodzenú korytnačku na obrázku 1. Viete koľko obetí mali ľudia doniesť?

Ak zatiaľ neviete úlohu vyriešiť, tak pokračujte v čítaní a k riešeniu sa môžete vrátiť neskôr.

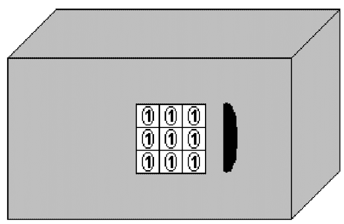
V literatúre sa stretávame aj s inou legendou o nadprirodzenej korytnačke: *Čínsky cisár Yu-Hung sa chodieval prechádzať okolo rieky Huang -He (Žltá rieka), kde hľadal pokoj svojej duše. Pri jednej takejto prechádzke vyšla z rieky podivuhodná korytnačka s bodkami na pancieri. Takúto korytnačku často vídaval na nočnej oblohe, ale bodky si nikdy nevšimol. Táto udalosť ho tak vzrušila, že domov odchádzal znepokojený, lebo nevedel, čo bodky znamenajú a aký odkaz mu božstvo posiela.*

2. Definícia

Skôr ako uvedieme definíciu magického štvorca pokúste sa vyriešiť nasledujúcu úlohu.

Úloha 2:

Po smrti lorda Nortona prišiel notár, aby oboznámil vdovu a ich troch synov s lordovou poslednou vôľou, ktorá znela takto: *„Tento kaštieľ spolu so všetkým, čo v ňom je odkazujem svojej manželke. Všetky moje peniaze sú uložené v rodinnom trezore a odkazujem ich tomu synovi, ktorý trezor otvorí v najkratšom čase. Ak sa to žiadnemu synovi nepodarí za týždeň, tak peniaze pripadnú mojej manželke.“* Notár odviedol synov k trezoru (obrázok 2), ktorý bol zamknutý kombinačnou zámkou a otváral sa správnym nastavením deviatich koliesok s deviatimi číslami (od 1 do 9) na každom koliesku. Potom pokračoval v čítaní: *„Kód na trezore sa nastavuje otáčaním deviatich koliesok s číslami od* 1 *do* 9*. Na kolieskach je potrebné nastaviť navzájom rôzne čísla tak, aby súčet trojice čísel v každom riadku, stĺpci aj na diagonále bol rovnaký.“* Ako by ste postupovali, keby ste vy boli jedným z potencionálnych dedičov?



Obr. 2

Riešenie. Lordovi synovia môžu postupovať tak, že budú postupne skúšať možnosti pre rozmiestnenie čísel 1 až 9 a spoliehať sa na šťastie. Všetkých možností je však $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot\ \ldots\ \cdot 2\ .\ \cdot 1 = 362\,880$, takže toto asi nebude najvhodnejší spôsob.

Vieme, že súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach má byť rovnaký. Súčet všetkých čísel od 1 do 9 je 45. Ak má byť v každom riadku rovnaký súčet, tak to musí byť číslo $45 : 3 = 15$. Číslo 15 je teda konštanta, ktorej sa má rovnať súčet každej trojice čísel v riadku, stĺpci aj na diagonále.

Ak číslo 15 napíšeme ako súčet troch navzájom rôznych prirodzených čísel, tak musí nastať jedna z nasledujúcich možností:

$1+9+5$	$2+9+4$	$3+8+4$	$4+6+5$
$1+8+6$	$2+8+5$	$3+7+5$	
	$2+7+6$		

V týchto súčtoch sa čísla 1, 3, 7, 9 vyskytujú 2 krát, čísla 2, 4, 6, 8 sa vyskytujú 3 krát, a len číslo 5 sa vyskytuje 4 krát. Ak si zoberieme tabuľku 3×3,

tak zistíme, že číslo, zapísané v ľubovoľnom rohu tabuľky, sa nachádza v troch trojiciach, ktorých súčet má byť číslo 15 (súčet v riadku, v stĺpci a na diagonále), číslo, zapísané v strede tabuľky, sa nachádza v štyroch trojiciach (súčet v riadku, v stĺpci a na obidvoch diagonálach) a ostatné čísla sa vyskytujú práve v dvoch trojiciach, ktorých súčet má byť číslo 15 (súčet v riadku a v stĺpci).

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že číslo 5 musí byť v strede tabuľky a čísla 2, 4, 6, 8 v rohoch tabuľky. Z toho dostávame nasledujúce možnosti:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Dostali sme 8 možností pre nastavenie kódu na trezore. Všimnite si, že všetky štvorce môžeme získať z prvého ak využijeme to, že existuje práve 8 symetrií štvorca.[1] Tieto tabuľky sa nazývajú magické štvorce rádu 3.

Definícia. *Magický štvorec* rádu n je štvorcová tabuľka, ktorá sa skladá z n^2 políčok, v ktorých sú umiestnené čísla $1\,,\,2\,,\ldots,\,n^2$ tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký.
Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva *magické číslo*.

Z riešenia úlohy 2 vyplýva, že magickým číslom magického štvorca rádu 3 je číslo 15 a to je aj počet obetí, ktoré uspokojili bôžika rieky Lo (pozri úloha 1).

Príklady magických štvorcov rádu 4, 5, 6 sú na obrázku 3.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

[1]Symetria geometrického útvaru je zhodné zobrazenie, v ktorom sa sa útvar zobrazí na seba.

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Obr. 3

Skúste porozmýšľať nad nasledujúcimi úlohami:

Úloha 2.1.

V magických štvorcoch rádu 3, ktoré sú zostrojené v úlohe 2, zmenšite každé číslo o 5. Aké majú tieto štvorce vlastnosti?

Úloha 2.2.

Existuje magický štvorec rádu 2?

Úloha 2.3.

Vedeli by ste úlohu 2 vyriešiť, ak by lord Norton nechal synov hľadať magický štvorec rádu 4?

Poznámka: V literatúre sa niekedy pojmom magický štvorec označuje aj štvorcová tabuľka čísel, ktorá spĺňa iné podmienky, napr.:
• nie je splnená podmienka rovnakého súčtu čísel na diagonálach, ale sú tam iné n-tice čísel, ktorých súčet je rovnaký,
• do tabuľky sú namiesto čísel $1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots,\ n^2$ vpísané ľubovoľné čísla, prvočísla, členy geometrickej postupnosti a pod.,
• podmienka o rovnakých súčtoch je nahradená podmienkou o rovnakých súčinoch.

Magickými štvorcami sa ľudia zaoberali tisícročia v rôznych častiach sveta a boli fascinovaní ich vlastnosťami, videli v nich niečo magické, niečo, čo môže ovplyvňovať osudy ľudí. Očarili nielen matematikov ale aj filozofov (*C. Agrippa*), spisovateľov (*J. W. Goethe*), maliarov (*A. Dürer*), politikov (*B. Franklin*). Peknú knihu o histórii magických štvorcov a alchýmii napísal docent chémie Karlovej Univerzity *Vladimír Karpenko*.

Najstaršia zmienka o magickom štvorci pochádza z Číny. Magický štvorec tretieho rádu nájdeme aj na starovekej tibetskej pečati. Takmer pred 500 rokmi vznikol v Číne magický štvorec rádu 6 (obrázok 3). V západnom svete sa magický štvorec prvý raz spomína v roku 130 n. l. v práci *Theona zo Smyrny*. Arabskí astrológovia ho v 9. storočí používali pri zostavovaní horoskopov. Známym a populárnym sa stal magický štvorec až okolo roku 1300 n. l. vďaka prácam gréckeho matematika *M. Moschopula*. V stredoveku, plnom mágie sa mu pripisovali rôzne tajomné vlastnosti, a takisto ho používali pri vytváraní horoskopov. Aj s názvom magický štvorec sa po prvý raz stretávame až v tomto období. V minulosti boli magické štvorce predmetom hlavolamov, dnes však nachádzajú praktické uplatnenie v rôznych oblastiach matematiky (napr. priraďovacie problémy operačnej analýzy, bistochastické matice), ale aj vo fyzike (napr. v termodynamike).

3. Úlohy o magických štvorcoch

Úloha 3.

Na obrázku 4 je tzv. *diabolský magický štvorec*, ktorý vznikol v Indii v 11. storočí. Aké útvary vytvárajú štvorice čísel, ktoré po sčítaní dávajú súčet 34.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Obr. 4

Úloha 4.

a) Do štvorca 4×4 znázorneného na obrázku 5 vpíšte čísla tak, aby vytvorili magický štvorec.

	10		
16		2	13

Obr. 5

b) Zostrojte čo najviac rôznych magických štvorcov rádu 4.

c) Aké je magické číslo štvorca rádu 4?

Už dosť dlho sa vie, že počet rôznych magických štvorcov rádu 4 je 7040. Pomocou počítača bolo zistené že počet magických štvorcov rádu 5 je až 2202441792. Doposiaľ ostáva v matematike otvorená otázka koľko je rôznych magických štvorcov rádu n pre $n \geq 6$. Existujú odhady, že magických štvorcov rádu 6 je $1,87 \cdot 10^{19}$ a magických štvorcov rádu 7 je $4,65 \cdot 10^{50}$. Aj keď nepoznáme ich počet, vieme, že toto číslo musí byť deliteľné ôsmimi (vzhľadom na počet symetrií štvorca).

Úloha 5.

a) Aké je magické číslo štvorca rádu 5, resp. 6?

b) Môžu mať dva magické štvorce rovnakého rádu rôzne magické čísla?

c) Odvoďte vzťah pre určenie magického čísla štvorca rádu n.

Riešenie: c) Stačí si uvedomiť, že čísla v magickom štvorci tvoria aritmetickú postupnosť[2] s diferenciou 1. Súčet všetkých čísel v magickom štvorci je teda $\frac{n^2}{2}\left(n^2+1\right)$. Keďže v každom riadku, resp. stĺpci je súčet čísel rovnaký a riadkov resp. stĺpcov je n dostaneme výsledok $\frac{n}{2}\left(n^2+1\right)$, čo je magické číslo štvorca rádu n.

Úloha 6.

Do tabuľky s rozmermi 3×3 napíšte vzostupne čísla od 1 do 9 tak, že začnete od ľavého horného rohu a postupne budete zľava doprava vypĺňať ostatné riadky. Sčítajte čísla na diagonále. To isté urobte pre tabuľky s rozmermi 4×4, 5×5. Zovšeobecnite svoje pozorovanie pre tabuľku $n \times n$, sformulujte hypotézu a dokážte ju.

Riešenie: Hypotéza znie: Ak do tabuľky s rozmermi $n \times n$ napíšeme vzostupne čísla od 1 do n^2 tak, že začneme od ľavého horného rohu a postupne budeme zľava doprava vypĺňať ostatné riadky, tak súčet čísel na diagonálach tabuľky bude magické číslo magického štvorca rádu n.

Dôkaz: Dokážeme, že ak čísla od 1 po n^2 zapíšeme do tabuľky tak, ako na obrázku 5 tak, súčet čísel na ľubovoľnej diagonále bude $\frac{n}{2}\left(n^2+1\right)$.

1	2	3	$\dots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots$	$n+n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\dots$	$2n+n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n-2)n+1$	$(n-2)n+2$	$(n-2)n+3$	$\dots$	$(n-2)n+n$
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	$\dots$	$(n-1)n+n=n^2$

Obr. 6

Políčko v i-tom riadku a v j-tom stĺpci tabuľky označme symbolom $m(i\ ,j)$. Podľa zadania úlohy do políčka tabuľky $m(i\ ,j)$ priradíme číslo $(i-1)n+j$. Uvažujme súčet čísel $m(i\ ,j)$ a $m(n-i+1\ ,\ n-j+1)$, ktoré sú v políčkach súmerných podľa stredu tabuľky. Platí $m(i\ ,\ j)+m(n-i+1\ ,\ n-j+1) = (i-1)n+j+(n-i+1-1)n+n-j+1 = n^2+1$. Ak n je párne, tak diagonále $\frac{n}{2}$ dvojíc čísel s rovnakým súčtom a preto súčet čísel na diagonále je $\frac{n}{2}\left(n^2+1\right)$. Ak n je nepárne, tak na diagonále je $\frac{n-1}{2}$ dvojíc čísel so súčtom n^2+1 a v strede tabuľky je číslo $\frac{n^2+1}{2}$. Súčet čísel na diagonále je opäť $\frac{n}{2}\left(n^2+1\right)$.

[2]Úlohu môžeme so žiakmi riešiť aj keď nepoznajú pojem aritmetická postupnosť. Využijeme ju na to, aby sme žiakom odvodili vzorec pre súčet $1+2+3+\ \dots\ +n$.

Úloha 6.1.

Do políčok tabuľky 4×4 umiestnite vzostupne od ľavého horného rohu do riadkov čísla od 1 do 16.
a) Zostrojte magický štvorec rádu 4 tak, že čísla ležiace na diagonálach ponecháte na svojom mieste a zmeníte len rozmiestnenie ostatných čísel.
b) Skúste vzájomnou výmenou čísiel ležiacich na tej istej diagonále zostrojiť magický štvorec rádu 4, pritom zvyšné čísla ponechajte na svojom mieste. Ktoré čísla musíte navzájom vymieňať, aby ste dostali magický štvorec?

Úloha 7.

a) Ku každému číslu magického štvorca pripočítajte to isté, ľubovoľne zvolené číslo. Aké vlastnosti má vzniknutý štvorec? Je takýto štvorec magickým štvorcom?
b) Každé číslo magického štvorca vynásobte ľubovoľne zvoleným číslom. Opäť skúmajte vlastnosti vzniknutého štvorca.

Úloha 8.

Čo sa stane ak vymeníme dva riadky alebo dva stĺpce v magickom štvorci. Ako je to v prípade, keď sú riadky a stĺpce „rovnako vzdialené“ od stredu magického štvorca? (Vymieňame i-ty a $(n+1-i)$-ty riadok resp. j-ty a $(n+1-j)$-ty stĺpec.)

Úloha 9.

Vytvorte magický štvorec rádu 5.

4. Magické kocky

Analógiou magického štvorca v priestore sú magické kocky. Pravdepodobne prvú zmienku o magickej kocke nájdeme v liste z apríla 1640 P. Fermata Mersenneovi. Viac informácií o magických kockách môžeme nájsť v [1] a [5].

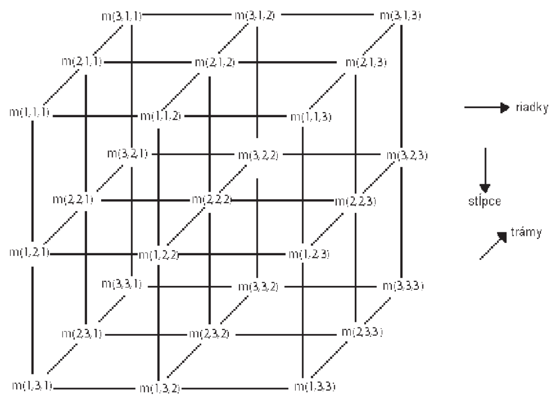
Definícia. *Magická kocka* rádu n je 3-rozmerná tabuľka, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla $1, 2, \ldots, n^3$ tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci, tráme a na štyroch hlavných diagonálach je rovný konštante, ktorú nazývame *magické číslo*.

Poznámka: Ak si prvok tabuľky, ktorý je v i-tom riadku, v j-tom stĺpci a v k-tom tráme označíme ako $m(i, j, k)$, tak:

- riadok – obsahuje n-ticu čísel
  $m(i, j, 1), m(i, j, 2), \ldots, m(i, j, n)$, kde $1 \leq i, j \leq n$
- stĺpec – obsahuje n-ticu čísel
  $m(i, 1, k), m(i, 2, k), \ldots, m(i, n, k)$, kde $1 \leq i, k \leq n$

- trám – obsahuje n-ticu čísel
  $m(1\,,j\,,k)\,,\,m(2\,,j\,,k)\,,\ldots,\,m(n\,,j\,,k)$, kde $1 \leq j\,,k \leq n$

Uvedomte si, že pre daný riadok ostáva prvý a druhý index nezmenený a mení sa len tretí index, pre daný stĺpec ostáva nezmenený prvý a tretí index a mení sa druhý index a pre daný trám je druhý a tretí index nemenný a mení sa len prvý index (pozri obrázok 7).



Obr. 7

Úloha 10.

Existuje magická kocka rádu 2?

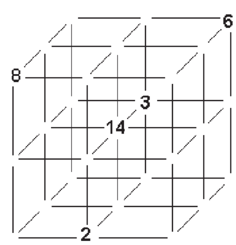
Úloha 11.

Aké je magické číslo magickej kocky rádu n?

Výsledok: $\dfrac{n}{2}\left(n^3+1\right)$

Úloha 12.

Do kocky na obrázku 8 doplňte chýbajúce čísla, tak aby vznikla magická kocka rádu 3.



Obr. 8

Úloha 13.

Preformulujte úlohy 5, 6 a 7 pre magické kocky. Môžeme závery z týchto úloh zovšeobecniť aj pre magické kocky?

5. Algoritmy

Ľudia sa stáročia snažili objaviť algoritmy na konštrukciu magických štvorcov a kociek. Už tisíc rokov je známy indický algoritmus na vytváranie magických štvorcov nepárneho rádu. Pomerne jednoduché sú návody na vytváranie magických štvorcov rádu $n \equiv 0 \pmod 4$, t.j. ak n je deliteľné číslom 4. Niektoré algoritmy sú pochopiteľné aj mladším žiakom základnej školy. Omnoho neskôr boli objavené algoritmy na vytváranie magických štvorcov rádu $n \equiv 2 \pmod 4$. Tieto algoritmy sú pomerne zložité.

Tu uvedieme vzorce pre konštrukciu magických štvorcov a kociek rádu n, ktoré sú špeciálnym prípadom vzorcov z článku [5].

1a) Magický štvorec rádu $n \equiv 1 \pmod 2$
$m(i\,,j) = \left[\left(i - j + \dfrac{n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n)\right] n + \left(i + j - \dfrac{n+3}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n)\ + 1$, kde $1 \leq i\,, j \leq n$.

1b) Magická kocka rádu $n \equiv 1 \pmod 2$
$m(i\,,j\,,k) = \left[(i - j + k - 1)\ (\mathrm{mod}\ n)\right] n^2 + \left[(i - j - k)\ (\mathrm{mod}\ n)\right] n\ + (i + j + k - 2)\ (\mathrm{mod}\ n) + 1$, kde $1 \leq i\,, j\,, k \leq n$.

2a) Magický štvorec rádu $n \equiv 0 \pmod 4$
Ak číslo $i + \left\lfloor \dfrac{2(i-1)}{n} \right\rfloor + j + \left\lfloor \dfrac{2(j-1)}{n} \right\rfloor$ je nepárne[3], tak $m(i\,,j) = i + (j-1)n$.
V opačnom prípade $m(i\,,j) = (n-j)n + n - i + 1$, kde $1 \leq i\,, j \leq n$.

2b) Magická kocka rádu $n \equiv 0 \pmod 4$
Ak číslo $i + \left\lfloor \dfrac{2(i-1)}{n} \right\rfloor + j + \left\lfloor \dfrac{2(j-1)}{n} \right\rfloor + k + \left\lfloor \dfrac{2(k-1)}{n} \right\rfloor$ je nepárne, tak $m(i\,,j\,,k) = (k-1)n^2 + (j-1)n + i$.
V opačnom prípade $m(i\,,j\,,k) = (n-k)n^2 + (n-j)n + n - i + 1$, kde $1 \leq i\,, j\,, k \leq n$.

3a) Magický štvorec rádu $n \equiv 2 \pmod 4$
$m(i\,,j) = s(u\,,v)\dfrac{n^2}{4} + m^*(i^*\,,j^*)$,
kde $i^* = \min\{i\,, n - i + 1\}$, $j^* = \min\{j\,, n - j + 1\}$, $m^*(i^*\,,j^*)$ je prvok magického štvorca rádu $\dfrac{n}{2}$ zostrojeného v bode 1.a), $u = (i^* - j^*)\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{n}{2}\right) + 1$,
$v = 2\left\lfloor \dfrac{2i-1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2j-1}{n} \right\rfloor + 1$, $s(u\,,v)$ je príslušný prvok nasledujúcej

[3]symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť z čísla x

tabuľky:

	$s(u\,,1)$	$s(u\,,2)$	$s(u\,,3)$	$s(u\,,4)$
$s(1\,,v)$	3	1	2	0
$s(2\,,v)$	1	3	0	2
$s(3\,,v)$	0	1	3	2
$s(2a+2\,,v)$	0	1	2	3
$s(2a+3\,,v)$	3	2	1	0

$$S = |s(u\,,v)|\,,\ a = 1\,,2\,,\ldots,\frac{n-6}{4}$$

3b) Magická kocka rádu $n \equiv 2 \pmod 4$

$m(i\,,j\,,k) = s(u\,,v)\dfrac{n^3}{8} + m^*(i^*\,,j^*\,,k^*)$,

kde $m^*(i^*\,,j^*\,,k^*)$ ($x^* = \min\{x\,,n+1-x\}$) je prvok magickej kocky rádu $\frac{n}{2}$ zostrojenej v bode 1b), $u = (i^* - j^* + k^*)\left(\mathrm{mod}\ \frac{n}{2}\right) + 1$, $v = 4\left\lfloor\frac{2i-1}{n}\right\rfloor + 2\left\lfloor\frac{2j-1}{n}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2k-1}{n}\right\rfloor + 1$ a $s(u\,,v)$ je príslušný prvok obdĺžnikovej tabuľky:

	$s(u\,,1)$	$s(u\,,2)$	$s(u\,,3)$	$s(u\,,4)$	$s(u\,,5)$	$s(u\,,6)$	$s(u\,,7)$	$s(u\,,8)$
$s(1\,,v)$	7	3	6	2	5	1	4	0
$s(2\,,v)$	3	7	2	6	1	5	0	4
$s(3\,,v)$	0	1	3	2	5	4	6	7
$s(2a+2\,,v)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$s(2a+3\,,v)$	7	6	5	4	3	2	1	0

$$S = |s(u\,,v)|\,,\ a = 1\,,2\,,\ldots,\frac{n-6}{4}$$

Úloha 14.

S použitím uvedených vzorcov napíšte program pre počítač, ktorý vytvorí magický štvorec, resp. magickú kocku ľubovoľného rádu.

Aby uvedené vzorce nepôsobili veľmi abstraktne, priblížime si prostredníctvom nasledujúcej úlohy, ako vznikli vzorce na konštrukciu magických štvorcov a kociek rádu $n \equiv 0 \pmod 4$

Úloha 15.

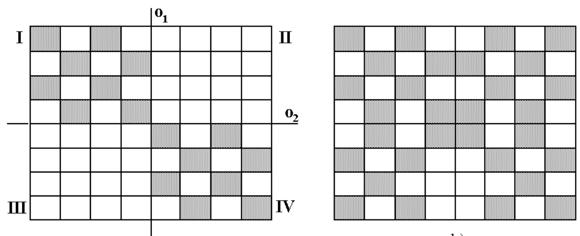
a) Na základe obrázka 9 skúste zistiť ako funguje algoritmus na vytváranie magických štvorcov rádu $n \equiv 0 \pmod 4$

b) Pomocou tohto algoritmu vytvorte magický štvorec rádu 12.

Návod:

1. Štvorec rádu $n \equiv 0 \pmod 4$ si rozdelíme na štyri zhodné časti ako je to znázornené na obrázku 9a).

2. Časti I. a IV. zafarbíme ako šachovnicu. II. a III. časť zafarbíme tak, aby zafarbenie bolo súmerné podľa dvoch osí súmernosti štvorca.
3. Do jednotlivých políčok vpíšeme čísla 1 , 2 , 3 , . . . , n^2.
4. Všetky čísla, ktoré boli napísané do tmavších políčok, nahradíme číslami, ktoré sú v políčkach súmerných podľa stredu štvorca.



a) b)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

c)

64	2	62	4	5	59	7	57
9	55	11	53	52	14	50	16
48	18	46	20	21	43	23	41
25	39	27	37	36	30	34	32
33	31	35	29	28	38	26	40
24	42	22	44	45	19	47	17
49	15	51	13	12	54	10	56
8	58	6	60	61	3	63	1

d)

Obr. 9

Úloha 16.

Na obrázku 10 je nakreslený magický štvorec rádu 8. V čom sa líši jeho konštrukcia od konštrukcie uvedenej na obrázku 9?

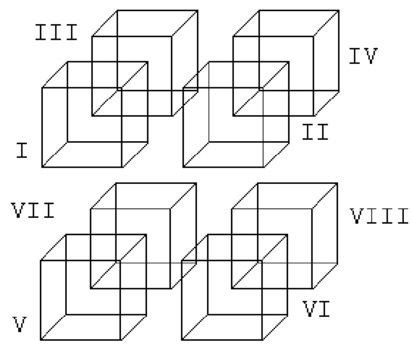
1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Obr. 10

Analogický algoritmus, ako sme používali pri konštrukcii magických štvorcov rádu $n \equiv 0 \pmod 4$, môžeme použiť aj pri konštrukcii magickej kocky rádu $n \equiv 0 \pmod 4$.

1. Kocku si rozdelíme na osem zhodných kociek rádu $\frac{n}{2}$ (pozri obrázok 11).

2. Políčka v kocke I. a VIII. zafarbíme striedavo sivou a bielou farbou. Políčka v kocke II. až VII. zafarbíme tak, aby zafarbenie celej kocky bolo súmerné podľa troch rovín súmerností kocky, ktorých spoločným bodom je stred kocky.
3. Do jednotlivých políčok kocky vpíšeme čísla $1, 2, 3, \dots, n^3$.
4. Všetky čísla, ktoré boli napísané do sivých políčok nahradíme číslami, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu kocky.



Obr. 11

Úloha 17.

Dokážte, že uvedený algoritmus pre konštrukciu magických kociek rádu $n \equiv 0 \pmod 4$ je správny.

Riešenie: Máme dokázať, že na základe uvedeného algoritmu dostaneme magickú kocku. To znamená, že obsahuje všetky prirodzené čísla z množiny $\{1, 2, 3, \dots, n^3\}$, a že súčet čísel v každom riadku, stĺpci, tráme a na všetkých štyroch diagonálach je $\frac{n}{2}(n^3+1)$.

Označme si políčka v kocke tak ako na obrázku 7. Z bodu 3 nášho algoritmu vyplýva, že naša kocka bude obsahovať všetky prirodzené čísla od 1 po n^3. Z bodu 3 a z riešení úloh 5 a 12 vyplýva, že súčet čísel na všetkých štyroch diagonálach kocky bude rovný $\frac{n}{2}(n^3+1)$.

Potrebujeme ešte dokázať, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a tráme je tiež $\frac{n}{2}(n^3+1)$.

Podľa bodu 3 vpíšeme postupne do jednotlivých políčok prirodzené čísla $1, 2, 3, \dots, n^3$. Do políčka $m(i, j, k)$, $1 \le i, j, k \le n$ vložíme číslo $(i-1)n^2 + (j-1)n + k$. Potom čísla, ktoré boli napísané do sivých políčok nahradíme číslami, ktoré sú v políčkach súmerných podľa stredu kocky. Teda číslo v políčku $m(i, j, k)$ nahradíme číslom v políčku $m(i^*, j^*, k^*)$, kde $x^* = n - x + 1$. V políčku $m(i, j, k)$ bude teraz číslo $(n-i)n^2 + (n-j)n + n - k + 1$.

Uvažujme súčet čísel v trámoch kocky. Sčítajme po dvojiciach čísla $m(i, j, k)$ a $m(i^*, j, k)$, ktoré sú v políčkach súmerných podľa roviny súmernosti rovnobežnej s prednou stenou kocky. Z konštrukcie vyplýva, že obidve čísla budú buď v tvare $(i-1)n^2+(j-1)n+k$, resp. $(i^*-1)n^2+(j-1)n+k$ alebo v tvare $(n-i)n^2+(n-j)n+n-k+1$, resp. $(n-i^*)n^2+(n-j)n+n-k+1$. Dvojíc prvého aj druhého typu bude $\frac{n}{4}$. Navyše zo súmernosti podľa spomínanej roviny vyplýva, že súčet $i+i^*=n+1$.

Ďalej platí:

$$[(i-1)n^2+(j-1)n+k]+[(i^*-1)n^2+(j-1)n+k]=n^2(n-1)+2n(j-1)+2k$$

$$[(n-i)n^2+(n-j)n+n-k+1]+[(n-i^*)n^2+(n-j)n+n-k+1]=n^2(n-1)+2n(n-j)+2(n-k+1).$$

Súčet čísel v trámoch kocky je teda:

$$\frac{n}{4}[n^2(n-1)+2n(j-1)+2k]+\frac{n}{4}[n^2(n-1)+2n(n-j)+2(n-k+1)]=\frac{n}{2}(n^3+1).$$

Analogicky by sme ukázali, že rovnaký je aj súčet čísel v stĺpcoch a riadkoch kocky.

6. Záver

Téma magické štvorce a magické kocky je veľmi bohatá. Navyše, o magických kockách bolo napísaných pomerne málo prác. V rámci nej sa môže učiteľ spolu so svojimi žiakmi venovať rôznym aktivitám, formulovať otázky a hľadať na ne odpovede. Okrem skúmania vlastností magických štvorcov a kociek je možné zaoberať sa magickými obdĺžnikmi, magickými hviezdami, magickými oktahedroidmi. (Viď [2], [4], [6].) Aj keď ľudí zaujímajú magické útvary už mnoho rokov, stále existuje veľa otázok, na ktoré nepoznáme odpoveď.

Táto práca vznikla s podporou slovenskej grantovej agentúry VEGA.

L i t e r a t ú r a

[1] W. S. Andrews, W. S. *Magic Squares and Cubes*, Dover, New York 1960.
[2] Čebrakov, J. V. *Magičeskie kvadraty*, Sankt-Peterburg 1995.
[3] Karpenko, V. *Tajemství magických čtvercu*, Pudorys, Praha 1997
[4] Trenkler, M. *Magické hviezdy*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **51** (1998), 1–7
[5] Trenkler, M. *Konštrukcia magických p-rozmerných kociek*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2000 (29), 19–29
[6] http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.html

Adresy autorov:

Ingrid Semanišinová, Katedra matematickej analýzy, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice, e-mail: `isemanis@science.upjs.sk`

Doc. RNDr.Marián Trenkler, CSc., Katedra geometrie a algebry, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice, e-mail: `trenkler@science.upjs.sk`